1 Kartesisches Produkt und Relation

1.1 Kartesisches Produkt/Kreuzprodukt

Mengen, Kreuzprodukt, Kartesisches Produkt:

$$M \times M = M^2$$

$$M \times M \times M = M^3$$

$$M \times M \times M \times \cdots \times M = M^n$$

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times \cdots \times M_n$$

$$A \times B \times C \times \cdots \times Z$$

geordnete Paare (x, y)

geordnetes Trippel (x, y, z)

geordnetes 10-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$

geordnetes n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Kartesisches Produkt: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen. Dann heißt die Menge der geordneten n-Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

$M = \{1, 2\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{ll} (1,1), & (1,2), \\ (2,1), & (2,2) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1), & (1,2), & (1,3), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3, 4\}$

$$M \times M = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2\}$

$$M \times M \times M = \left\{ \begin{array}{ll} (1,1,1), & (1,1,2), \\ (1,2,1), & (1,2,2), \\ (2,1,1), & (2,1,2), \\ (2,2,1), & (2,2,2), \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2, 3\}$

$$M \times M \times M = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1,1), & (1,1,2), & (1,1,3), \\ (1,2,1), & (1,2,2), & (1,2,3), \\ (1,3,1), & (1,3,2), & (1,3,3), \\ (2,1,1), & (2,1,2), & (2,1,3), \\ (2,2,1), & (2,2,2), & (2,2,3), \\ (2,3,1), & (2,3,2), & (2,3,3), \\ (3,1,1), & (3,1,2), & (3,1,3), \\ (3,2,1), & (3,2,2), & (3,2,3), \\ (3,3,1), & (3,3,2), & (3,3,3), \end{array} \right\}$$

$M = \{1, 2\}$

$$M \times M = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

1.2 Relation,Abbildung,Operation

Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ beliebige nichtleere Menge. Eine n**-stellige Relation** R über $M_1, \ldots, M_n$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times \cdots \times M_n$.

$$R \subseteq M_1 \times M_2$$

$$R \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3$$

$$R \subseteq M \times M \times \cdots \times M = M^n$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{(1,1)}, & (1,2), & (1,3), \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)} \end{array} \right\} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} = R$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{(1,1)}, & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)}, & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \underline{(4,4)} \end{array} \right\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} = R$$

$$R \subseteq M \times M = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & \underline{(1,2)}, & (1,3), & \underline{(1,4)}, \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), & (2,4), \\ \underline{(3,1)}, & (3,2), & \underline{(3,3)}, & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & \underline{(4,3)}, & (4,4) \end{array} \right\} = \{(1,2), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3), (4,3)\} = R$$

Sei $R \subseteq M_1 \times M_2$ eine zweistellige Relation. In der Regel wählen wir ein Symbol wie z.B. $\preceq$ oder $\sim$ zur Bezeichnung der Relation und schreiben $x \preceq y$ bzw. $x \sim y$ für $(x, y) \in R$.
Beispiele für Relationen:

- Abbildungen
- Vergleiche im gewohnten Sinne
- Operationen

Vergleiche im gewohnten Sinne, $x \leq y$

$$R = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{(1,1)}, & \underline{(1,2)}, & \underline{(1,3)}, & \underline{(1,4)}, \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & \underline{(2,3)}, & \underline{(2,4)}, \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)}, & \underline{(3,4)}, \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \underline{(4,4)} \end{array} \right\}$$

Vergleiche im gewohnten Sinne, $x = y$

$$R = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{(1,1)}, & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & \underline{(2,2)}, & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & \underline{(3,3)}, & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \underline{(4,4)} \end{array} \right\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = R$$

Operation $z = x + y$

$$R = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1,1), & \underline{(1,1,2)}, & (1,1,3), \\ (1,2,1), & (1,2,2), & \underline{(1,2,3)}, \\ (1,3,1), & (1,3,2), & (1,3,3), \\ (2,1,1), & (2,1,2), & \underline{(2,1,3)}, \\ (2,2,1), & (2,2,2), & (2,2,3), \\ (2,3,1), & (2,3,2), & (2,3,3), \\ (3,1,1), & (3,1,2), & (3,1,3), \\ (3,2,1), & (3,2,2), & (3,2,3), \\ (3,3,1), & (3,3,2), & (3,3,3), \end{array} \right\}$$

- Operation $z = x + y$
- Kartesisches Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $z = x + y \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $z = x + y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sei M eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Relation, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \sim y$ und $y \sim x$ so ist $x = y$. **Antisymmetrie**
3. Für alle x, y, z gilt: $x \sim y$ und $y \sim z$, so ist $x \sim z$. **Transitivität**
   Dann heißt $\sim$ **(partielle Ordnung)**.
   Gilt zusätzlich
4. Für alle $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ oder $y \sim x$. **Linearität**
   so heïst die Ordnung **linear** oder **total**

Sei M eine nichtleere Menge und $\sim$ mit $R_\sim \subseteq M^2$ eine Relation mit den Eigenschaften

1. Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \sim y$, so ist $y \sim x$. **Symmetrie**
3. Für alle $x, y, z \in M$ gilt: Ist $x \sim y$ und $y \sim z$, so ist $x \sim z$. **Transitivität**
   Dann heißt $\sim$ eine **Äquivalenzrelation**

Anders ausgedrückt:
Sei M eine nichtleere Menge und R eine Relation ($R \subseteq M \times M$), die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ so ist $x = y$. **Antisymmetrie**
3. Für alle x, y, z gilt: $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so ist $(x, z) \in R$. **Transitivität**
   Dann heißt R **(partielle Ordnung)**.
   Gilt zusätzlich
4. Für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$. **Linearität**
   so heïst die Ordnung **linear** oder **total**

Sei M eine nichtleere Menge und R mit $R \subseteq M^2$ eine Relation mit den Eigenschaften

1. Für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$. **Reflexivität**
2. Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$, so ist $(y, x) \in R$. **Symmetrie**
3. Für alle $x, y, z \in M$ gilt: Ist $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so ist $(x, z) \in R$. **Transitivität**
   Dann heißt R eine **Äquivalenzrelation**

Duale Relation: Sei $\preceq$ eine zweistellige Relation, also $R_{\preceq} = \{(x, y) \in M \times N : x \preceq y\}$. Dann heißt $R_{\succeq} = \{(x, y) \in M \times N : (x, y) \in R_{\succeq}\}$ die zu $R_{\preceq}$ **duale Relation**. Es ist also $y \succeq x$ genau dann, wenn $x \preceq y$
Abbildungen: Seien M und N nichtleere Menge.

1. Eine **Abbildung** f der Menge M in die Menge N erhält man durch eine Zuordnung, die jedem **Argument** (**Urbild**) $x \in M$ eindeutig sein **Bild** $f(x)$ zuordnet. M heißt der **Definitionsbereich** von f, die Menge $\{f(x) : x \in M\}$ heißt **Bild** oder **Bildbereich** von M unter f.
2. Die Menge $G_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N$ heißt **Graph von** f.

- Abbildungen
  - Allgemein Abbildung
  - Funktionen
    - eindimensionale Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
    - mehrdimensionale Funktionen
    - Kurven
    - Vektorfelder

Surjektivität, Injektivität, Bijektivität

2 Die natürlichen Zahlen

Peanosche Axiome

1. 1 ist in $\mathbb{N}$.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen „Nachfolger“$n* \in \mathbb{N}$.
3. 1 ist kein Nachfolger.
4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. **Vollständige Induktion**: Enthält eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ die 1 und mit jedem nM auch $n*$, dann gilt $M = \mathbb{N}$

3 Halbgruppen, Gruppen, Körper

Halbgruppe: Eine Menge mit einer Operation, die dem Assoziativgesetz gehorcht. Eine Menge zum Beispiel die den natürlichen Zahlen entspricht und eine Operation, wie die Multiplikation.

Kommutative Halbgruppe: Eine Halbgruppe, wenn die Operation dem Kommutativgesetz gehorcht, also wenn einerseits das Assoziativgesetz gilt und andererseits das Kommutativgesetz

Monoid: Eine Halbgruppe, bei der es ein neutrales Element zu der Operation gibt. Wie zum Beispiel 1 bei der Multiplikation.

Gruppe: Ein Monoid, bei der es zu der Operation ein inverses Element gibt. Zum Beispiel ist $-a$ das inverse Element zu a. Wenn wir $-a$ zu a addieren, erhalten wir 0 und 0 ist das neutrale Element der Addition „+“.

Körper: Eine Menge, auf die zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) definiert sind. Und bei denen gilt:

1. $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe
2. $(R, \cdot, 1)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei gilt: $1 \neq 0$
3. Es gilt das Distributivgesetz, d.h. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

4 linear geordneter Körper

lineare Ordnung, linear geordneter Körper: Sei M eine nichtleere Menge. Auf M sei eine **Relation** $\sim$ gegeben, d.h., $\sim$ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Gilt $(x, y) \in\sim$, so schreiben wir

$$x \sim y \text{ (lies: } x \text{ vor } y).$$

Die Relation $\sim$ heißt **Ordnung** auf M und das Paar $(M, \sim)$ eine **geordnete** Menge, wenn für alle $x, y \in M$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $x \sim x$ (Reflexivität)
2. $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

3. $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim y$ (Transitivität)
   Gilt überdies hinaus auch noch
4. $(x \sim y) \vee (y \sim x)$
   so heißt $\sim$ eine **lineare Ordnung** auf M und $(M, \sim)$ eine **linear geordnete Menge**.

R **als linear geordneter Körper:** Es existiert eine lineare Ordnung $\leq$ („kleiner oder gleich“) auf R, sodass $(R, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgenden Eigenschaften ist:

1. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (Verträglichkeit der Addition)
2. Für alle $x, y, z \in R$ gilt $x \leq y$ und $0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$ (Verträglichkeit der Multiplikation)

Für einen linear geordneten Körper schreibt man $(R, \leq)$

5 Die reellen Zahlen

1. Körperaxiome
2. Ordnungsaxiome
3. Schnittaxiom bzw. äquivalente Axiome

1. **Körperaxiome:**
   (a) **Kommutativgesetze:** Es gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
   (b) **Assoziativgesetze:** Es gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
   (c) **Distributivgesetz:** Es gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$
   (d) **Existenz neutraler Elemente:** Es gibt eine reelle Zahl 0 („Null“) und eine davon verschiedene Zahl 1 („Eins“), sodass für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$.
   (e) **Existenz inverser Elemente:** Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl $-a$, sodass $a + (-a) = 0$ ist. Ferner gibt es zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ eine reelle Zahl a^{-1}, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$ ist.
2. **Ordnungsaxiome:**
   (a) **Trichotonomiegesetz:** Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Beziehungen
   $$a < b \text{ oder } a = b \text{ oder } a > b$$
   (b) **Transitivitätsgesetz:** Ist $a < b$ und $b < c$, so folgt $a < c$
   (c) **Monotoniegesetze:** Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und es gilt $ac < bc$ für alle $c > 0$. oder

i. **Verträglichkeit der Addition, Translationsinvarianz:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

ii. **Verträglichkeit der Multiplikation, Dehnungsinvarianz:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Einen **linear geordneten Körper** kann man auch **angeordneten Körper** nennen

3. **Schnittaxiom** oder **Axiom der Ordnungsvollständigkeit**, oder **Vollständigkeitsaxiom**, oder **axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$:**
D.h. das Intervallhalbierungsverfahren existiert, oder die $\sqrt{2}$ oder ähnliche existiert und so sind mit dem Intervallhalbierungsverfahren zum Beispiel alle Wurzeln wie $\sqrt{2}$ (nur als ein Beispiel) zu finden, so dass die Reellen Zahlen vollständig beschrieben sind, im Gegensatz den rationalen Zahlen, bei denen es $\frac{a}{b}$ gibt.

6 Intervallhalbierungsverfahren, ...

1. **Dedekind'scher Schnitt:** Eine Möglichkeit wäre der Dedekind'sche Schnitt.

2. **Intervallhalbierungsverfahren:**

```
a := 0; b := 2;
WHILE(TRUE) DO
      c := (a+b)/2;
      IF c^2 < 2 THEN a := c;
                 ELSE b := c;
      END; /*IF*/
END./*WHILE*/
```

3. Intervallhalbierungsverfahren, ...

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>>

int main(void) {
    double a, b, c, d;
    int i;
    int x[100];

    c = 2;
    d = 2;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        if(c*c < 2)
            c = c + d;
        else
            c = c - d;
```

```
        d = d/2;
    }

    printf("%lf\n", c);
    getchar();

    c = 4;
    a = 0;
    b = 2;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        c = (a+b)/2;
        if(c*c < 2)
            a = c;
        else
            b = c;
    }

    printf("%lf\n", c);
    getchar();

    a = 0;
    b = 2;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        c = (a+b)/2;
        if((c*c) < 2) {
            x[i] = 1;
            a = c;
        }
        else {
            x[i] = 0;
            b = c;
        }
    }

    printf("\n");
    printf("%lf\n", c);

    for(i = 0;  i < 100;  i++)
        printf("%i", x[i]);

    printf("\n");

    d = 0.5;
    c = 1;

    for(i = 0;  i < 100;  i++) {
        if(x[i])
            c = c + d;
```

```
            else
                c = c - d;
            d = d/2;
        }

        printf("%lf", c);


    return 0;
    }
```